

Problemstellung Sortieren

Eingabe: Eine Folge

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$$

von Zahlen.

Ausgabe: Eine Permutation

$$\langle a'_1, \dots, a'_n \rangle$$

der Zahlen a_1, \dots, a_n mit

$$a'_i \leq a'_{i+1}$$

für $0 < i < n$.

Übersicht

Wir hatten bis jetzt:

Sortier-Algorithmus	worst-case	in-place
INSERTION-SORT	$\Theta(n^2)$	yes
MERGE-SORT	$\Theta(n \lg n)$	NO

Jetzt kommen:

Sortier-Algorithmus	worst-case	in-place
HEAP-SORT	$\Theta(n \lg n)$	yes
QUICK-SORT	$\Theta(n^2)$	yes

QUICK-SORT: avg-case von $\Theta(n \lg n)$ und in praxi sehr schnell.

Die Struktur der Daten

- Normalerweise sortiert man nicht nur reine Zahlen, sondern **Datensätze** (records, Tupel) nach einem Feld (Attribut).
- Dieses Feld wird auch Schlüssel (key) genannt.
- Da Datensätze groß sein können, werden Zeiger auf die Datensätze benutzt.
- Das spart Kopierkosten!
- Trotzdem formulieren wir Algorithmus mit Zahlen.
- Umformulierung/Umkodierung für konkretes Problem notwendig.
- Ersichtlich: Algorithmus ist Abstraktion.

Übersicht

Reine Sortieralgorithmen:

- Alle oben genannten Sortierverfahren basieren auf Vergleichen.
- Wir werden die Grenzen dieser Verfahren kennenlernen.
Untere Schranke: $\Omega(n \ln n)$.
- Zwei Sortierverfahren schlagen diese Schranke:
 - COUNTING-SORT
Für n Zahlen $1, \dots, k$: $O(n + k)$.
 - RADIX-SORT
Erweitern des Zahlenbereiches.
 - BUCKET-SORT
Reelle Zahlen, wobei Wahrscheinlichkeitsverteilung bekannt sein muß.

Übersicht

Dazu lernen wir noch Algorithmen kennen, die die i -t kleinste Zahl aus einer Sequenz von Zahlen herausuchen.

- Mit Sortieren: $O(n \lg n)$.
- Besseres Verfahren: $O(n)$.
- Noch eins: $O(n^2)$ worst case, aber $O(n)$ avg-case.
- Und noch ein komplizierterer Algorithmus: $O(n)$.

(Binary) Heap

Ein binärer Heap ist ein Array, daß als "vollständiger" binärer Baum angesehen werden kann:

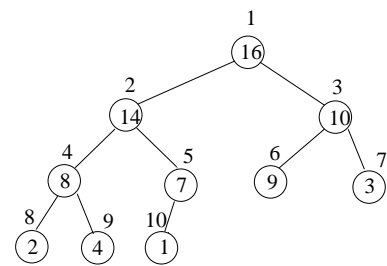
Heapsort

Die wichtigsten Eigenschaften von Heapsort in Kürze:

- worst-case: $O(n \lg n)$
- in-place
- benutzte Datenstruktur: Heap zur Verwaltung von Information

Ein Heap wird in vielen Algorithmen benötigt, z.B.:

- Prioritätsschlangen (priority queues)



(a)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
16	14	10	8	7	9	3	2	4	1

(b)

(Binary) Heap

- Knoten \leftrightarrow Arrayelement
- Baum ist vollständig gefüllt, bis zu einem Knoten auf der untersten Ebene. Die restlichen Knoten rechts davon fehlen.
- Ein Array A , das einen Heap repräsentiert hat zwei Attribute:
 1. **length[A]**: die Anzahl der Elemente von A .
 2. **heap-size[A]**: die Anzahl der Elemente im Heap, der in A gespeichert wird.
 A ist Vorrat an Speicherplätzen.
- Es gilt: **heap-size[A] \leq length[A]**
- Kein Element von A nach **A[heap-size[A]]** ist benutzt, obwohl natürlich potentiell alle Elemente **A[1 ... length[A]]** benutzt werden können.

Heap-Eigenschaft

Es gilt die Heap-Eigenschaft:

Für jeden Knoten außer der Wurzel gilt

$$A[\text{PARENT}(i)] \geq A[i]$$

In Worten:

Der Wert eines Knotens (der in ihm gespeicherten Zahl) ist höchstens so hoch wie der Wert des Vaterknotens.

Heap-Indizes

Wie numeriert man die Knoten im Baum, so daß diese Nummern dann gültige Arrayindizes ergeben?

- Die Wurzel bekommt die 1.
d.h.: $A[1]$ speichert die Wurzel.
- Index des linken Sohnes von Knoten i :
LEFT(i)
return $2i$;
- Index des rechten Sohnes von Knoten i :
RIGHT(i)
return $2i + 1$;
- Index des Vaters von i :
PARENT(i)
return $\lfloor 2i \rfloor$;

Implementierung: Als Macros using bitshifts.

Heap-Höhe

Def.: Die **Höhe** eines Knotens in einem Baum definieren wir als die Länge des längsten Pfades vom Knoten bis zu einem Blatt.

Die **Höhe** eines Baumes ist dann die Höhe der Wurzel.

Bem: Die Höhe eines Heaps für n Elemente ist $\Theta(\lg n)$.
(s. Übung)

Die meisten Prozeduren auf einem Heap benötigen eine Laufzeit, die maximal proportional zur Höhe ist. Also: $O(\lg n)$.

Heap-Operationen

Für das Sortieren interessant:

- HEAPIFY mit $O(\lg n)$
erhält die Heap-Eigenschaft
- BUILD-HEAP mit $O(n)$
baut einen Heap aus einem unsortierten Array
- HEAPSORT mit $O(n \lg n)$
sortiert ein Array in-place

Für Prioritätsschlangen:

- EXTRACT-MAX mit $O(\lg n)$
gibt Maximum der im Heap gespeicherten Zahlen
- INSERT mit $O(\lg n)$
fügt Element in Heap ein

HEAPIFY

Ziel:

- Erhalten der Heap-Eigenschaft.

Diese war:

- $A[\text{PARENT}(i)] \geq A[i]$
für alle Knoten ausser der Wurzel

Idee:

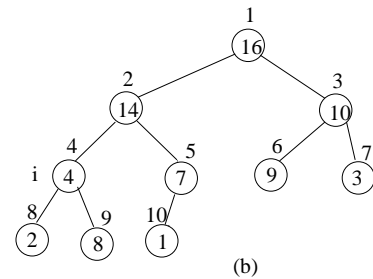
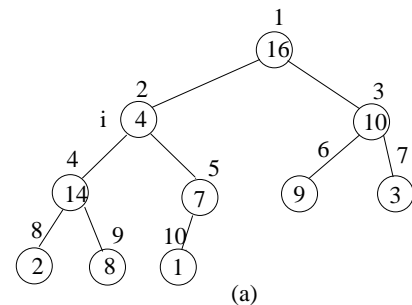
- Eingabe: ein i
- Annahme: $\text{Left}(i)$ und $\text{Right}(i)$ sind Heaps
- Aber: $A[i]$ kann kleiner als Sohn sein.
- Maßnahme: lasse $A[i]$ nach unten sinken.
- Dann: Teilbaum von i ist Heap

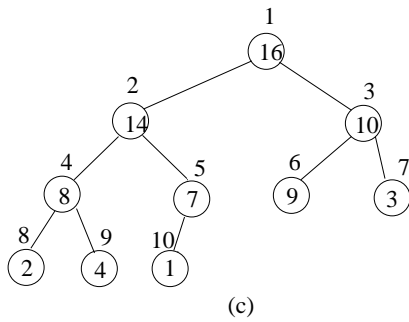
HEAPIFY

HEAPIFY (A, i)

```

1   $l \leftarrow \text{LEFT}(i)$ 
2   $r \leftarrow \text{RIGHT}(i)$ 
3  if  $l \leq \text{heap-size}[A]$  and  $A[l] > A[i]$ 
4      then  $\text{largest} \leftarrow l$ 
5      else  $\text{largest} \leftarrow i$ 
6  if  $r \leq \text{heap-size}[A]$  and  $A[r] > A[\text{largest}]$ 
7      then  $\text{largest} \leftarrow r$ 
8  if  $\text{largest} \neq i$ 
9      then exchange  $A[i] \leftrightarrow A[\text{largest}]$ 
10     HEAPIFY ( $A, \text{largest}$ )
  
```





HEAPIFY Beispiel

- (a) $i = 2$ verletzt Heap-Eigenschaft, da $A[2]$ nicht größer als beide Söhne.
- (b) Heap-Eigenschaft für $i = 2$ wird durch vertauschen des Inhalts von Knoten 2 und 4 wiederhergestellt. Aber: Heap-Eigenschaft von $i = 4$ ist dadurch verletzt. Daher rekursiver Aufruf.
- (c) Vertauschen der Inhalte der Knoten 4 und 9 stellt die Heap-Eigenschaft für $i = 4$ wieder her.

HEAPIFY Analyse

Laufzeit von HEAPIFY für Teilbaum der Größe n bei Knoten i :

- $\max \mathbf{A}[i], \mathbf{A}[\mathbf{LEFT}(i)], \mathbf{A}[\mathbf{RIGHT}(i)]$ suchen: $\Theta(1)$
- rekursiver Aufruf auf **einem** Unterbaum von i :
maximale Größe eines solchen Unterbaums: $2n/3$
 - unterste Ebene ganz voll: $n/2$
 - unterste Ebene nur halb voll: $\frac{2}{3}n$

Es ergibt sich also für die Laufzeit folgende Rekurrenz:

$$T(n) \leq T(2n/3) + \Theta(1)$$

Die Lösung ist

$$T(n) = O(\lg n)$$

Oder in Termini der Höhe: $T(h) = O(h)$

Rekurrenzen

Wie bekommt man die Lösung einer Rekurrenz?

Methoden:

1. Substitutionsmethode
2. Iterationsmethode
3. Master Theorem

Bemerkungen:

- Für obige Rekurrenz verwenden wir das Master Theorem.
- Wenn anwendbar, Master Theorem am einfachsten.

Master Theorem

Seien

- $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten,
- $f(n)$ eine Funktion,
- $T(n)$ definiert für die natürlichen Zahlen durch

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

wobei n/b interpretiert wird als $\lceil n/b \rceil$ oder $\lfloor n/b \rfloor$.

Master Theorem Anwendung von 2

Für HEAPIFY:

$$T(n) \leq T(2n/3) + \Theta(1)$$

Fall 2 des Master Theorems:

(2) Falls

$$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

dann

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$$

Zu zeigen:

$$\Theta(1) = \Theta(n^{\log_{2/3}(1)})$$

das ist richtig, da

$$n^{\log_{2/3}(1)} = n^0 = 1$$

Also

$$T(n) = O(n^{\log_{2/3}(1)} \lg n) = O(\lg n)$$

q.e.d.

Dann ergeben sich für $T(n)$ folgende asymptotischen Grenzen:

1. Falls

$$f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$$

für ein $\epsilon > 0$

dann

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

2. Falls

$$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

dann

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$$

3. Falls

$$f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$$

für ein $\epsilon > 0$ und

$$af(n/b) \leq cf(n)$$

für ein $c < 1$ und genügend große n

dann

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

BUILD-HEAP

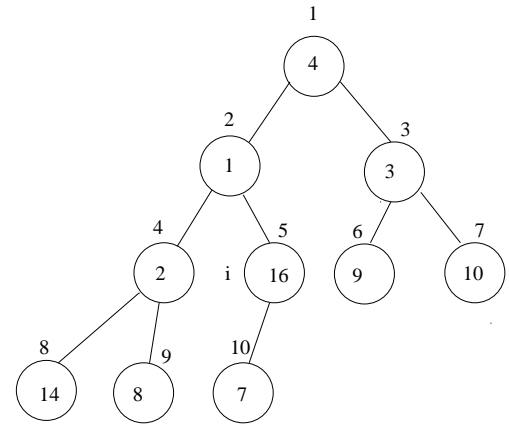
- BUILD-HEAP baut einen Heap aus einem Array
- BUILD-HEAP verwendet HEAPIFY
 - von den Blättern aufwärts zur Wurzel
- In $A[\lfloor n/2 \rfloor + 1] \dots n$ sind nur Blätter.
- Blätter sind Bäume aus einem Knoten und diese sind bereits Heaps.
- Anwendung von HEAPIFY auf $A[1 \dots \lfloor n/2 \rfloor]$ von rechts nach links.
- Letzteres garantiert für i
 - die linken und rechten Teilbäume von i sind bereits Heaps bevor HEAPIFY auf i angewendet wird.

BUILD-HEAP

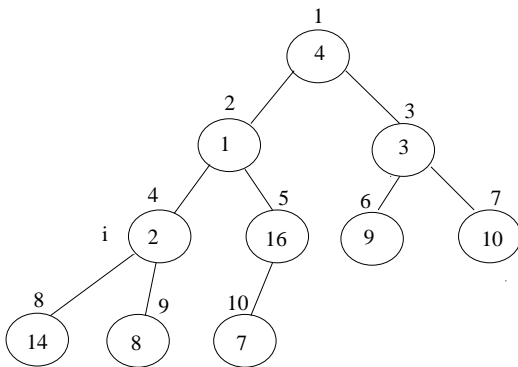
BUILD-HEAP(**A**)

```

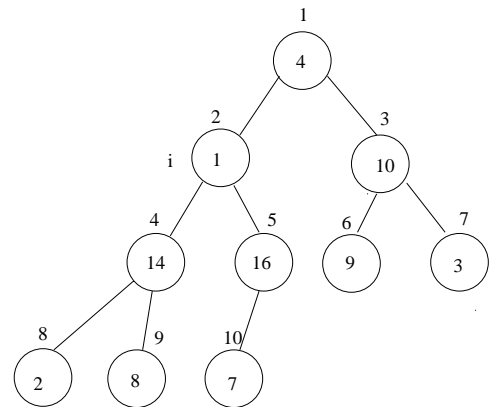
1  heap-size[A] ← length[A]
2  for i ← ⌊ length[A]/2 ⌋ downto 1
3    do HEAPIFY(A, i)
    
```



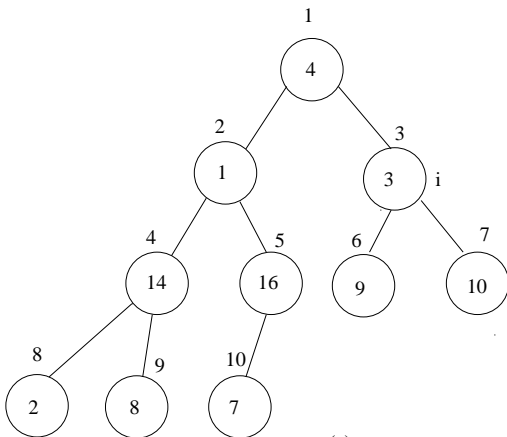
(a)



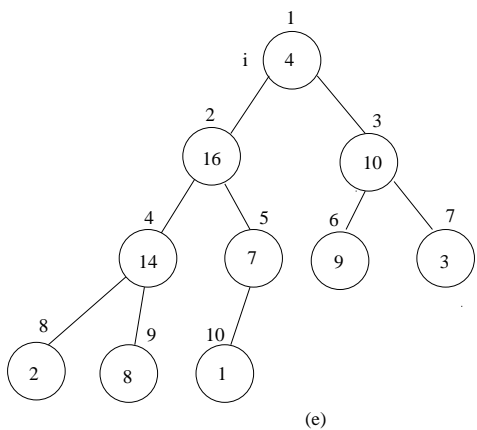
(b)



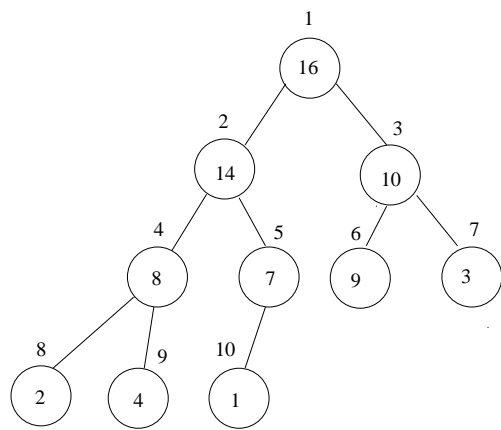
(d)



(c)



(e)



(f)

BUILD-HEAP Analyse

Eine einfache obere Schranke:

- Jeder Aufruf von HEAPIFY kostet $O(\lg n)$
- Es gibt $O(n)$ solche Aufrufe
- Laufzeit: $O(n \lg n)$

Dieses ist zwar eine korrekte obere Schranke, jedoch keine enge.

Also suchen wir eine bessere.

Knackpunkt:

- Laufzeit von HEAPIFY variiert mit der Höhe

BUILD-HEAP Analyse

Eigenschaft eines Heaps:

- In einem n -elementigen Heap gibt es höchstens $\lceil n/2^{h+1} \rceil$ Knoten der Höhe h .
(s. Übung)

BUILD-HEAP Analyse

HEAPIFY braucht für Knoten der Höhe h $O(n)$ Zeit.

Es ergeben sich also folgende Kosten für BUILD-HEAP:

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil O(h) = O\left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{h}{2^h}\right)$$

BUILD-HEAP Analyse

Aus

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil O(h) = O\left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{h}{2^h}\right)$$

ergibt sich also

$$\begin{aligned} O\left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{h}{2^h}\right) &= O\left(n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h}\right) \\ &= O(n) \end{aligned}$$

Also:

- BUILD-HEAP läuft in $O(n)$

Zwischenrechnung

Es gilt (3.6):

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

mit $x=1/2$ erhalten wir

$$\sum_{h=0}^{\infty} hx^h = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2$$

HEAP-SORT

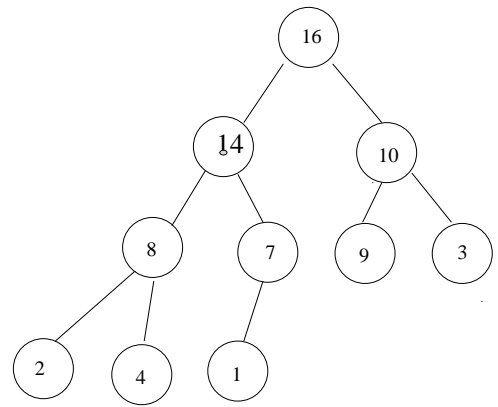
1. Wir bauen zunächst einen Heap.
2. Damit steht das größte Element an der Wurzel.
3. Tausche Wurzel (= $A[1]$) mit letztem Element in Heap ($\mathbf{A[\text{heap-size}]}$).
4. Wiederherstellen der Heap-Eigenschaft.

HEAP-SORT

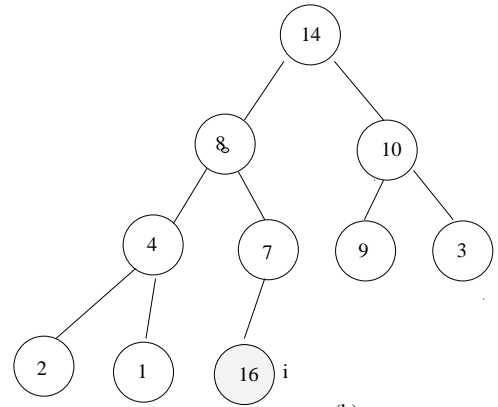
HEAPSORT(**A**)

```

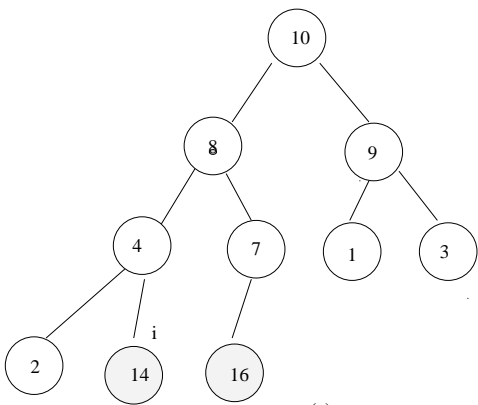
1  BUILD-HEAP( A )
2  for  $i \leftarrow \text{length}[A]$  downto 2
3      do exchange  $A[1] \leftrightarrow A[i]$ 
4          heap-size[A]  $\leftarrow$  heap-size[A] - 1
5          HEAPIFY( A, 1 )
    
```



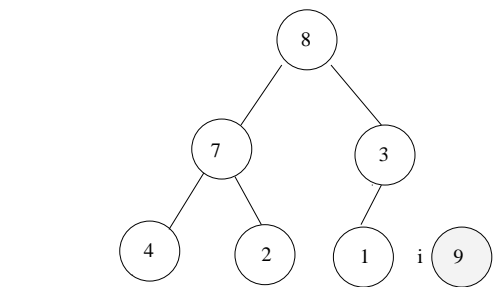
(a)



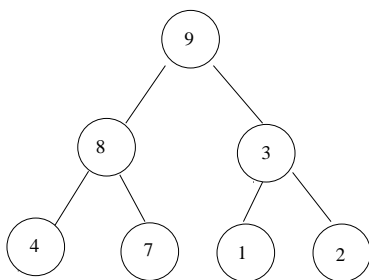
(b)



(c)



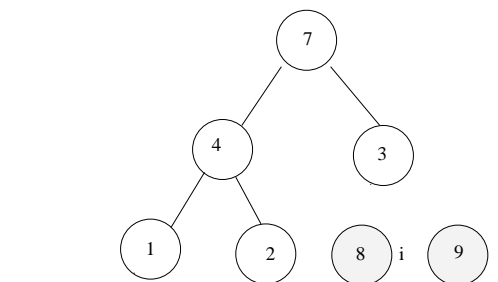
(d)



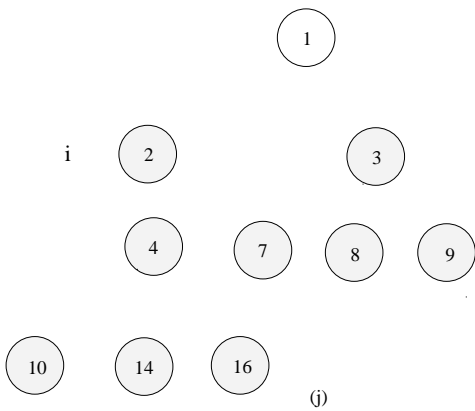
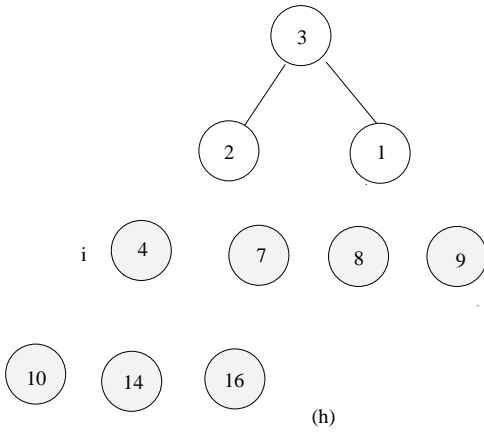
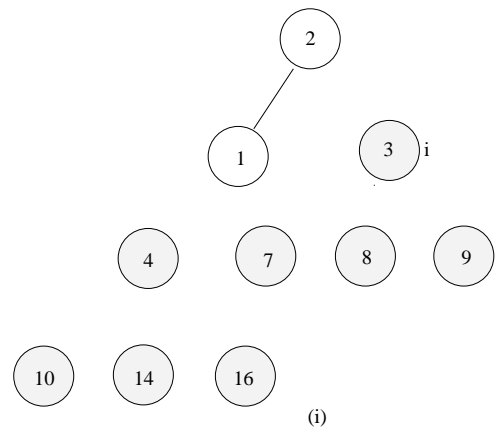
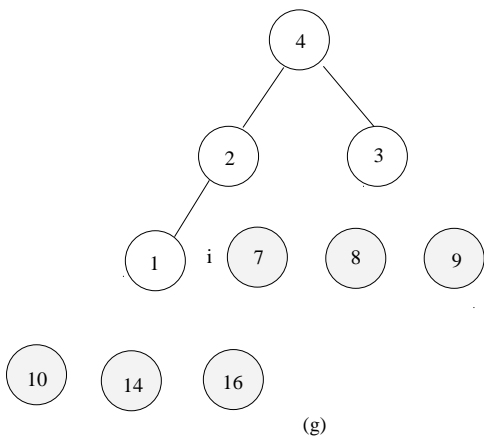
(e)



(f)



(f)



SORTIEREN

HEAP-SORT Analyse

HEAP-SORT benötigt

$$O(n \lg n)$$

Zeit, da

- Aufruf von BUILD-HEAP $O(n)$ braucht
- jeder der $n-1$ Aufrufe von HEAPIFY $O(\lg n)$ braucht

QUICK-SORT wird schlechteres worst-case Verhalten haben, ist aber in der Praxis meistens schneller als HEAP-SORT.

Ausflug: Prioritätsschlangen

- Der Heap ist eine nützliche Datenstruktur.
- Verwendet z.B. für Prioritätsschlangen.
- Die Datenstruktur der Prioritätsschlangen braucht man z.B. für
 - Job Scheduling
key = Priorität
 - Simulatoren
key = Zeitstempel

Prioritätsschlange

Eine Prioritätsschlange unterstützt folgende Operationen:

- INSERT(S, x)
fügt ein Element x in Menge S ein
 $S \leftarrow S \cup \{x\}$
- MAXIMUM(S)
gibt das Maximum der Elemente von S zurück
- EXTRACT-MAX(S)
gibt das Maximum von S zurück und entfernt es aus S .

Dual: MINIMUM(S) und EXTRACT-MIN(S).

Implementierung mit Heaps.

Anmerkungen

- Heap ist eine Datenstruktur
- Prioritätsschlangen sind eine Datenstruktur
- Wir bauen Prioritätsschlangen mit Heaps
- Ergo: man kann Datenstrukturen mit anderen Datenstrukturen bauen.

HEAP-MAXIMUM

HEAP-MAXIMUM(A)
return $A[1]$

Laufzeit: $O(1)$

HEAP-EXTRACT-MAX

 HEAP-EXTRACT-MAX(A)

```

1 if  $heap-size[A] < 1$ 
2   then error "heap underflow"
3  $max \leftarrow A[1]$ 
4  $A[1] \leftarrow A[heap-size[A]]$ 
5  $heap-size[A] \leftarrow heap-size[A] - 1$ 
6 HEAPIFY( $A, 1$ )
7 return  $max$ 
  
```

 Laufzeit: $O(\lg n)$

HEAP-INSERT

Idee:

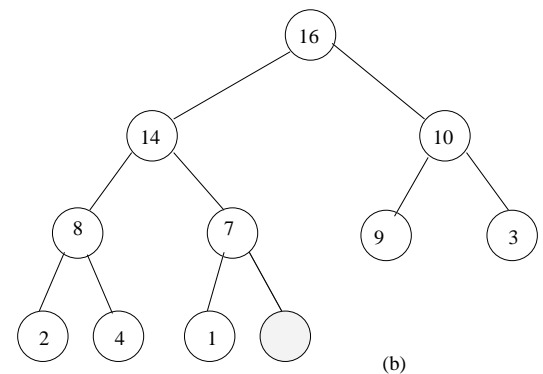
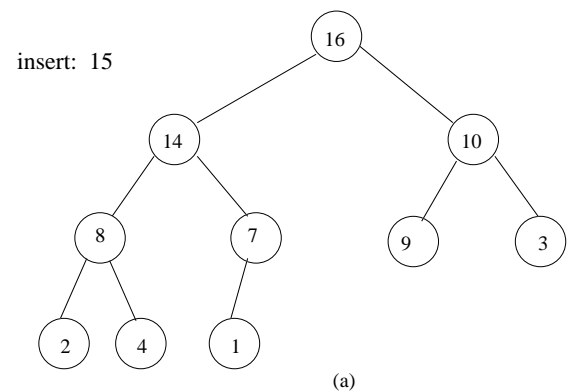
1. Einfügen des neuen Elementes ans Ende des Arrays
2. Dann wie INSERTION-SORT (1 5-7) auf dem Pfad bis zur Wurzel richtigen Platz suchen

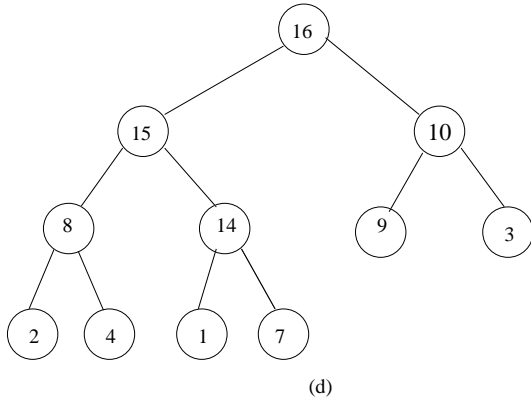
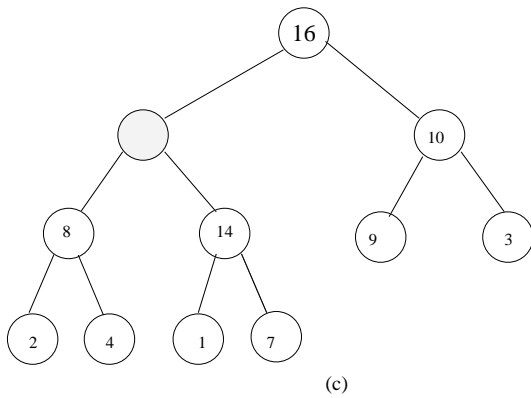
HEAP-INSERT

 HEAP-INSERT(A, key)

```

1  $heap-size[A] \leftarrow heap-size[A] + 1$ 
2  $i \leftarrow heap-size[A]$ 
3 while  $i > 1$  and  $A[PARENT(i)] < key$ 
4   do  $A[i] \leftarrow A[PARENT(i)]$ 
5      $i \leftarrow PARENT(i)$ 
6  $A[i] \leftarrow key$ 
  
```

 Laufzeit: $O(\lg n)$
 (Pfadlänge)




Prioritätsschlangen auf HEAP-Basis

Zusammenfassend:

- Jede Operation einer Prioritätsschlange kann in $O(\lg n)$ mit einem Heap realisiert werden.

Quicksort

Eigenschaften von Quicksort:

- divide-and-conquer-Algorithmus
- worst-case: $\Theta(n^2)$
- avg-case: $\Theta(n \lg n)$
- versteckten Konstanten in $\Theta(n \lg n)$ sind sehr klein
- sortiert in-place

Idee:

- teile nach Elementgrößen

(MERGE-SORT teilt Array nach Lage (Mitte).)

Quicksort

Divide-and-conquer-Schritte um $A[p \dots r]$ zu sortieren:

Divide $A[p \dots r]$ wird umgeordnet in zwei nichtleere Teilarrays $A[p \dots q]$ und $A[q + 1 \dots r]$, so daß jedes Element von $A[p \dots q]$ kleiner ist als jedes Element von $A[q + 1 \dots r]$.

q wird von der Umordnungsprozedur mitberechnet

Conquer Die Teilarrays $A[p \dots q]$ und $A[q + 1 \dots r]$ werden rekursiv durch Quicksort sortiert.

Combine Da in-place sortiert wird, ist in diesem Schritt keine Arbeit notwendig.

QUICKSORT

 QUICKSORT(A, p, r)

```

1 if  $p < r$ 
2   then  $q \leftarrow$  PARTITION( $A, p, r$ )
3     QUICKSORT( $A, p, q$ )
4     QUICKSORT( $A, q + 1, r$ )
  
```

Ein Aufruf QUICKSORT($A, 1, \text{length}[A]$) sortiert das ganze Array A .

PARTITION

Idee:

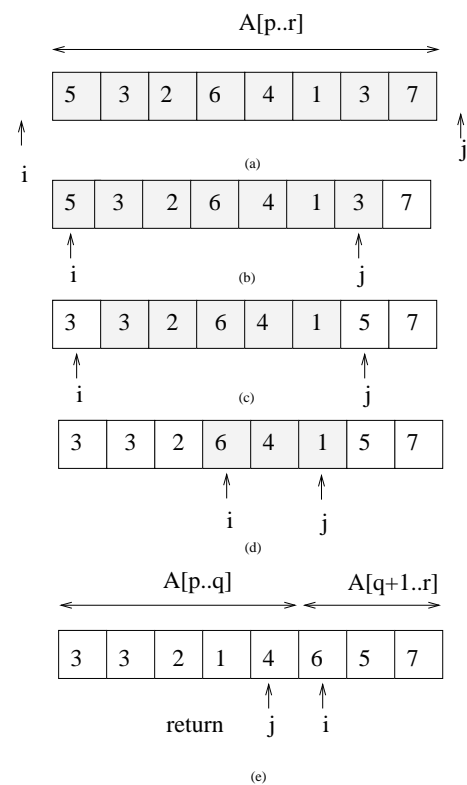
- suche ein Pivot-Element x
- alle Elemente kleiner als x kommen dann in $A[p \dots q]$ und alle Elemente größer als x kommen in $A[q + 1 \dots r]$.
- dazu wird A von links und rechts gleichzeitig durchlaufen.
- indizes: i von links und j von rechts
- durchlaufen, bis man zwei Elemente $A[i]$ und $A[j]$ findet mit
 - $A[i] \geq x$
 - $A[j] \leq x$
 diese werden dann vertauscht
- wenn sich i und j treffen ist man fertig.

PARTITION

 PARTITION(A, p, r)

```

1  $x \leftarrow A[p]$ 
2  $i \leftarrow p - 1$ 
3  $j \leftarrow r + 1$ 
4 while TRUE
5   do repeat  $j \leftarrow j - 1$ 
6     until  $A[j] \leq x$ 
7     repeat  $i \leftarrow i + 1$ 
8       until  $A[i] \geq x$ 
9     if  $i < j$ 
10      then exchange  $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
11      else return  $j$ 
  
```



PARTITION

- konzeptionell einfach:
 - schiebe alle Elemente $\geq x$ in den unteren Teil von A und alle $\leq x$ in den oberen Teil von A .
- Pseudocode ist aber trickreich:
 - i und j bleiben immer in $A[p \dots r]$.
(kein range-Fehler) nicht offensichtlich im Pseudocode.
 - wichtig: $A[p]$ wird benutzt.
falls $A[r]$ benutzt und $A[r]$ ist Maximum:
Endlosschleife in QUICKSORT, da PARTITION $q = r$ zurückgibt.
- LAUFZEIT: $\Theta(n)$, falls $n = r - p + 1$.

QUICKSORT worst-case

Behauptung:

- worst-case, falls eine Region $n - 1$ Elemente, die andere 1 Element beinhaltet

Annahme:

- Dies geschieht in jedem Schritt

Laufzeitkosten:

- Partitionierungen: $\Theta(n)$ und $\Theta(1)$.

Rekurrenz:

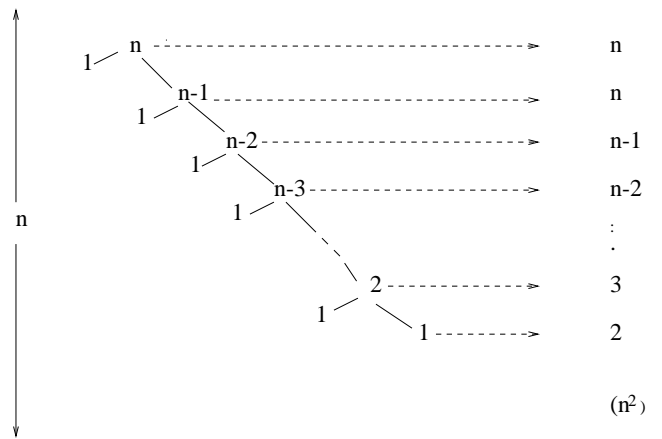
$$T(n) = T(n - 1) + \Theta(n)$$

Rekursionsbaum:

QUICKSORT Analyse

Feststellung:

- Laufzeit abhängig von Balancierung (Verhältnis der Größen beider Partitionen):
 - balanciert: asymptotische Laufzeit $O(n \lg n)$
 - unbalanciert: asymptotische Laufzeit $O(n^2)$



QUICKSORT worst-case

- Wir lösen diese Rekurrenz durch Iteration.
- Dazu benötigen wir Beobachtung: $T(1) = \Theta(1)$

$$\begin{aligned}
 T(n) &= T(n-1) + \Theta(n) \\
 &= \sum_{k=1}^n \Theta(k) \\
 &= \Theta\left(\sum_{k=1}^n k\right) \\
 &= \Theta(n^2)
 \end{aligned}$$

QUICKSORT worst-case

Anmerkungen:

- worst-case tritt auf, falls A schon sortiert
- in diesem Fall braucht INSERTION-SORT $\Theta(n)$

QUICKSORT best-case

Behauptung:

- best-case, falls beide Partitionen $n/2$ groß sind

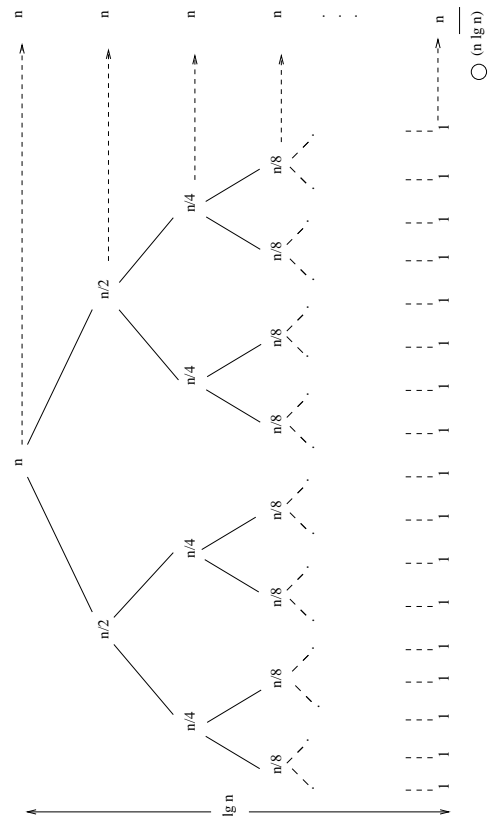
Annahme:

- Dieser Fall kommt bei jedem Aufruf vor

Rekurrenz:

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

Rekursionsbaum:



QUICKSORT best-case

Lösen durch Fall 2 des Master-Theorems: Seien

- $a \geq 1$ und $b > 1$ Konstanten,
- $f(n)$ eine Funktion,
- $T(n)$ definiert für die natürlichen Zahlen durch

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

wobei n/b interpretiert wird als $\lceil n/b \rceil$ oder $\lfloor n/b \rfloor$.

(2) Falls

$$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

dann

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$$

Einfluß Partitionierung auf Rekurrenz

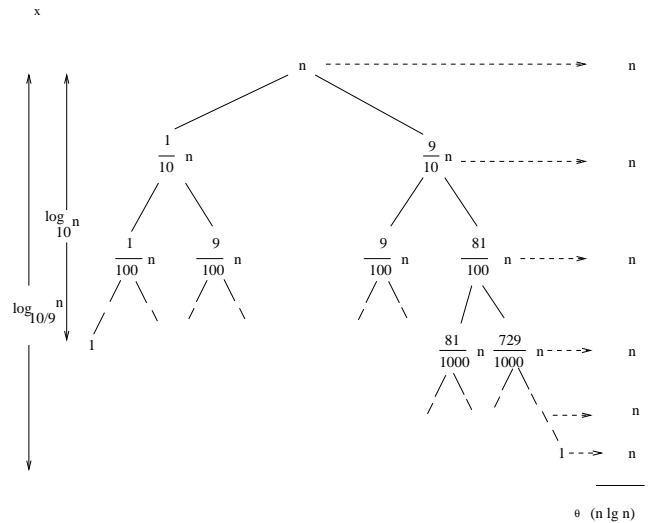
Annahme:

- Partition partitioniert im Verhältnis 9:1

Rekurrenz:

$$T(n) = T(9n/10) + T(n/10) + n$$

Rekursionsbaum:



QUICKSORT best-case

Mit $a = b = 2$:

$$T(n) = \Theta(n \lg n)$$

- Also ist QUICKSORT hier viel schneller.
- Also ist eine "geschickte" Partitionierung sehr wichtig.
- Aber: avg-case nah an best-case und nicht an worst-case

Einfluß Partitionierung auf Rekurrenz

Mit

- $\log_{10/9} n = \Theta(\lg n)$

haben wir

- Laufzeit immer noch $\Theta(n \lg n)$

Ähnlich:

- 99/1
- 999/1

Allgemein:

- Falls Verhältnis durch Konstante beschränkt ist, so ist die Laufzeit von QUICKSORT $\Theta(n \lg n)$

Ausflug Gleichverteilung

Was ist Gleichverteilung (von n Zahlen im Bereich $[1, k]$)?

- Wenn jede Zahl von $[1, k]$ gleich häufig vorkommt.

Wie kommt Gleichverteilung zustande?

- Durch Würfeln.

Was ist keine Gleichverteilung?

- Telefonbucheintragungen: Meier häufiger als Moerkotte

Intuition avg-case

Normalerweise:

- in einem Rekursionsbaum gibt es:
 - gute Partitionierungen und
 - schlechte Partitionierungen

Wie sind diese verteilt?

Intuition avg-case

- Annahme: Eingaben gleichverteilt
 - Dann:
 - mehr als 80% besser als 9:1
 - weniger als 20% schlechter als 9:1
 - Gute und schlechte Partitionierungen zufällig auf Rekursionsbaum verteilt.
 - vereinfachende Annahme:
 - gute und schlechte Partitionierungen abwechselnd.
 - gute sind 1:1 und schlechte n-1:1.
- Basiskosten für $n = 1$ seien 1.

Intuition avg-case

Die Folge von einer guten und einer schlechten Partitionierung liefert

- 3 Teilarrays der Größen 1, $(n-1)/2$ und $(n-1)/2$
- mit Kosten $2n-1 = \Theta(n)$
- Also: dieser Fall ist "fast" der optimale Fall.
- Nur: Konstanten für Partitionierung werden größer

Randomized Quicksort

Beobachtung (Ex 13.4-4):

- Für jede Konstante $k > 0$ gilt:
 - Für alle bis auf $O(1/n^k)$ der $n!$ Permutationen des Eingabearrays hat QUICKSORT die Laufzeit $\Theta(n \lg n)$.

Konsequenz:

- permutiere Zahlen im Array zufällig, da dann Chance auf worst-case sehr gering

Dies ändert nichts an der asymptotischen Laufzeit.

Realisierung:

- Funktion $\text{RANDOM}(a,b)$: liefert eine Zahl zwischen a und b .
- die Folge dieser Zahlen sieht zufällig aus.

QUICKSORT: weiteres Vorgehen

- RANDOMIZED-QUICKSORT
damit wir nicht in eine Falle laufen
(alles oder weite strecken schon sortiert)
- Analyse von RANDOMIZED-QUICKSORT

RANDOMIZED QUICKSORT

$\text{RANDOMIZED-PARTITION}(A, p, r)$

- 1 $i \leftarrow \text{RANDOM}(p,r)$
- 2 exchange $A[p] \leftrightarrow A[i]$
- 3 return $\text{PARTITION}(A,p,r)$

$\text{RANDOMIZED-QUICKSORT}(A, p, r)$

- 1 **if** $p < r$
- 2 **then** $q \leftarrow \text{RANDOMIZED-PARTITION}(A, p, r)$
- 3 $\text{RANDOMIZED-QUICKSORT}(A, p, q)$
- 4 $\text{RANDOMIZED-QUICKSORT}(A, q+1, r)$

Randomized Quicksort worst-case

Vorher gesehen:

- worst-case split ergibt $O(n^2)$ Laufzeit
- unter der Annahme, daß dies tatsächlich der schlechteste Fall ist

Jetzt:

- Genauere Analyse

Damit:

$$\begin{aligned} T(n) &= \max_{1 \leq q \leq n-1} (T(q) + T(n-q)) + \Theta(n) \\ &\leq \max_{1 \leq q \leq n-1} (cq^2 + c(n-q)^2) + \Theta(n) \\ &= c * \max_{1 \leq q \leq n-1} (q^2 + (n-q)^2) + \Theta(n) \end{aligned}$$

Da 2. Ableitung von $q^2 + (n-q)^2$ nach q positiv (Übung):

- Maximum bei 1 oder $n-1$

Beide Werte gleich!

Also:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq q \leq n-1} (q^2 + (n-q)^2) &= 1^2 + (n-1)^2 \\ &= 1 + (n^2 - 2n + 1) \\ &= n^2 - 2(n-1) \end{aligned}$$

Randomized Quicksort worst-case

Sei $T(n)$ worst-case Laufzeit von RANDOMIZED-QUICKSORT
Dann

$$T(n) = \max_{1 \leq q \leq n-1} (T(q) + T(n-q)) + \Theta(n)$$

wobei q über $1, \dots, n-1$ läuft, da PARTITION zwei nicht-leere Regionen erzeugt.

Lösung der Rekurrenz:

- Mit der Substitutionsmethode

Wir raten:

$$T(n) \leq cn^2$$

Also

$$\begin{aligned} T(n) &\leq c * n^2 - 2c(n-1) + \Theta(n) \\ &\leq c * n^2 \end{aligned}$$

falls c so groß, daß $-2c(n-1) + \Theta(n)$ dominiert.

Also:

- worst case $O(n^2)$

gilt auch für QUICKSORT

RANDOMIZED-QUICKSORT avg-case

Vorgehen:

- Analyse von RANDOMIZED-PARTITION
- Erstellen der Rekurrenz
- Lösen der Rekurrenz

RANDOMIZED-PARTITION Analyse

Feststellungen:

- Wenn PARTITION aufgerufen wird, hat RANDOMIZED-PARTITION $A[p]$ mit einem zufälligen Element $A[i]$ vertauscht.
- Return-Wert q von PARTITION hängt nur vom **Rang** von $x = A[i]$ ab.
(Rang(x) = k , falls x die k -t kleinste Zahl ist.
anders ausgedrückt: es gibt k Elemente, die $\leq x$ sind.
- Falls $A[p \dots r]$ $n = r - p + 1$ Elemente hat, so ist $\text{rank}(x) = i$ ($1 \leq i \leq n$) mit Wahrscheinlichkeit $1/n$.

RANDOMIZED-PARTITION Analyse

vereinfachende Annahme:

- Alle Elemente sind unterschiedlich.
- Dies macht Analyse einfacher.
- Ergebnis $O(n \lg n)$ avg-case für RANDOMIZED-QUICKSORT gilt aber auch sonst

Wir berechnen jetzt die Wahrscheinlichkeit, der verschiedenen Partitionierungen (Größen).

$\text{rank}(x) = 1$: Dann hält PARTITION mit $i = j = p$.

Die linke Partition enthält nur $A[p]$.

Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $1/n$.

(= Wahrscheinlichkeit $\text{rank}(x) = 1$)

$\text{rank}(x) \geq 2$: Dann gibt es mindestens ein Element $\leq x = A[p]$.

Der erste Durchlauf durch die **while**-Schleife hält bei $i = p$, $j > p$.

$A[p]$ wird also in die rechte Partition geschoben.

Wenn PARTITION anhält, ist jedes Element links von x echt kleiner als x .

Also: für $i = 1, \dots, n - 1$, $\text{rank}(x) \geq 2$:

linke Partition hat mit Wahrscheinlichkeit $1/n$ Größe i

Zusammenfassend:

Die Größe $q - p + 1$ der linken Partition ist 1 mit Wahrscheinlichkeit $2/n$ und i ($i = 2, \dots, n - 1$) mit Wahrscheinlichkeit $1/n$

Mit $T(1) = \Theta(1)$, $T(n - 1) = O(n^2)$ (aus worst-case):

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(T(1) + T(n - 1)) &= \frac{1}{n}(\Theta(1) + O(n^2)) \\ &= O(n) \end{aligned}$$

$\Theta(n)$ absorbiert $O(n)$, also:

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{n-1} (T(q) + T(n - q)) + \Theta(n) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{q=1}^{n-1} (T(q)) + \Theta(n) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (T(k)) + \Theta(n) \end{aligned}$$

Erstellen der Rekurrenz

Sei $T(n)$ die avg-case Laufzeit für das Sortieren eines Arrays der Größe n .

Es gilt $T(1) = \Theta(1)$.

PARTITION benötigt $\Theta(n)$ und gibt q zurück.

Rekursives sortieren von Teilarrays der Länge q und $n - q$.

Also $T(n) =$:

$$\frac{1}{n} \left(T(1) + T(n - 1) + \sum_{q=1}^{n-1} (T(q) + T(n - q)) \right) + \Theta(n)$$

(q ist gleichverteilt, wie oben ausgerechnet, ausser daß $q = 1$ zweimal vorkommt; einmal aus Σ herausgezogen.)

Lösen der Rekurrenz: Substitutionsmethode

Annahme: $T(n) \leq an \lg n + b$ für Konst. $a, b > 0$

Weiter: a, b so groß, daß $an \lg n + b > T(1)$

Dann: Für $n > 1$:

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (T(k)) + \Theta(n) \\ &\leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (ak \lg k + b) + \Theta(n) \\ &= \frac{2a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (k \lg k) + \frac{2b}{n}(n - 1) + \Theta(n) \end{aligned}$$

Wir zeigen unten:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k \lg k) \leq \frac{1}{2} n^2 \lg n - \frac{1}{8} n^2$$

Damit:

$$\begin{aligned}
 T(n) &\leq \frac{2a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (k \lg k) + \frac{2b}{n}(n-1) + \Theta(n) \\
 &\leq \frac{2a}{n} \left(\frac{1}{2} n^2 \lg n - \frac{1}{8} n^2 \right) + \frac{2b}{n}(n-1) + \Theta(n) \\
 &\leq a n \lg n - \frac{a}{4} n + 2b + \Theta(n) \\
 &= a n \lg n + b + (\Theta(n) + b - \frac{a}{4} n) \\
 &\leq a n \lg n + b
 \end{aligned}$$

dabei a so groß, daß $a/4n$ majorisiert $\Theta(n) + b$.

Also: $T(n) = O(n \lg n)$

zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k \lg k) \leq \frac{1}{2} n^2 \lg n - \frac{1}{8} n^2$$

leicht:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k \lg k) \leq n^2 \lg n$$

da jedes $k \lg k \leq n \lg n$.

Dies reicht aber nicht, da wir für die Lösung der Rekurrenz eine Schranke der Form

$$\frac{1}{2} n^2 \lg n - \Omega(n^2)$$

benötigen.

Also berechnen wir strengere Schranke.

TRICK: spalten der Summe.

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k \lg k) = \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} (k \lg k) + \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} (k \lg k)$$

- erste Summe: $\lg k \leq \lg(n/2) = \lg n - 1$.
- zweite Summe: $\lg k \leq \lg n$.

Also:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} (k \lg k) &\leq (\lg n - 1) \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k + (\lg n) \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} k \\
 &= \lg n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k \\
 &\leq \frac{1}{2} n(n-1) \lg n - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \frac{n}{2} \\
 &\leq \frac{1}{2} n^2 \lg n - \frac{1}{8} n^2
 \end{aligned}$$

für $n \geq 2$. qed.

Zusammenfassung

Bis jetzt:

- mehrere Algorithmen in $\Theta(n \lg n)$ worst-case oder avg-case.
- alle Algorithmen basierten auf Vergleichen

Jetzt:

- Beweis einer unteren Schranke für vergleichsbasierte Algorithmen
- schnellere Algorithmen, die nicht auf vergleichen basieren

Untere Schranken für Sortieren

Annahme:

- Es werden nur $\leq, <, >, \geq, =$ genutzt um zwei Elemente einer Folge zu sortieren.
- Keine andere Information über die Elemente wird benutzt.

Einschränkung:

- Alle Elemente der Folge sind unterschiedlich.

Daher:

- $<$ reicht aus.

Entscheidungsbaum

Beobachtung:

- Es existieren $n!$ Fakultät Permutationen der Eingabefolge.
- Nur eine ergibt sortierte Folge.

Entscheidungsbaum:

- Jeder interne Knoten ist mit einem $a_i : a_j$ markiert. $1 \leq i, j \leq n$.
- Jedes Blatt ist mit einer Permutation markiert.

Entscheidungsbaum

Zusammenhang Algorithmen:

- nur interessant: Vergleiche
vernachlässige: Kontrolle, Zuweisungen, usw.
- jeder vom Algorithmus durchgeführter Vergleich entspricht einem Vergleich im Entscheidungsbaum:
 - Wurzel=erster Vergleich
 - Nachfolgeknoten: abhängig vom Ausgang vorheriger Vergleiche.
- Jedes Blatt im Entscheidungsbaum ist genau eine der möglichen Permutationen.
- Alle Permutationen müssen vorkommen.

